Le Logarithme népérien

I°) Le logarithme népérien

1°) Définition

On appelle fonction logarithme népérien la fonction primitive de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1

$$y = \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$

2°) Conséquences

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

$x \to \ln x$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

3°) Règles de calcul

a. Propriétés fondamentales

$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \ln (a,b) = \ln a + \ln b$

Démonstration :

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$; on pose $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \ln (ax)$ $(a \in \mathbb{R}^{+*})$

Alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; f'(x) = g'(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; f(x) = g(x) + k$

Pour $x = 1$; $f(1) = g(1) + k \Leftrightarrow \ln 1 = \ln a + k \Leftrightarrow 0 = \ln a + k \Leftrightarrow k = -\ln a$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; \ln x = \ln (ax) - \ln a$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$; $\mathbf{\ln(ax) = \ln x + \ln a}$

b. Autres propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; \forall n \in \mathbb{N}; \ln a^n = n \ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}; \ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2; \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}; \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

II°) Étude de la fonction logarithme népérien f:x → ln x

1°) Étude de ln x

$D_f = \mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$

f n'est ni paire ni impaire
sens de variation :

$f'(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}; f'(x) > 0$

f est strictement croissant sur $\mathbb{R}^{+*}$

limites :

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ (asymptote : axe des ordonnées d'équation x=0)

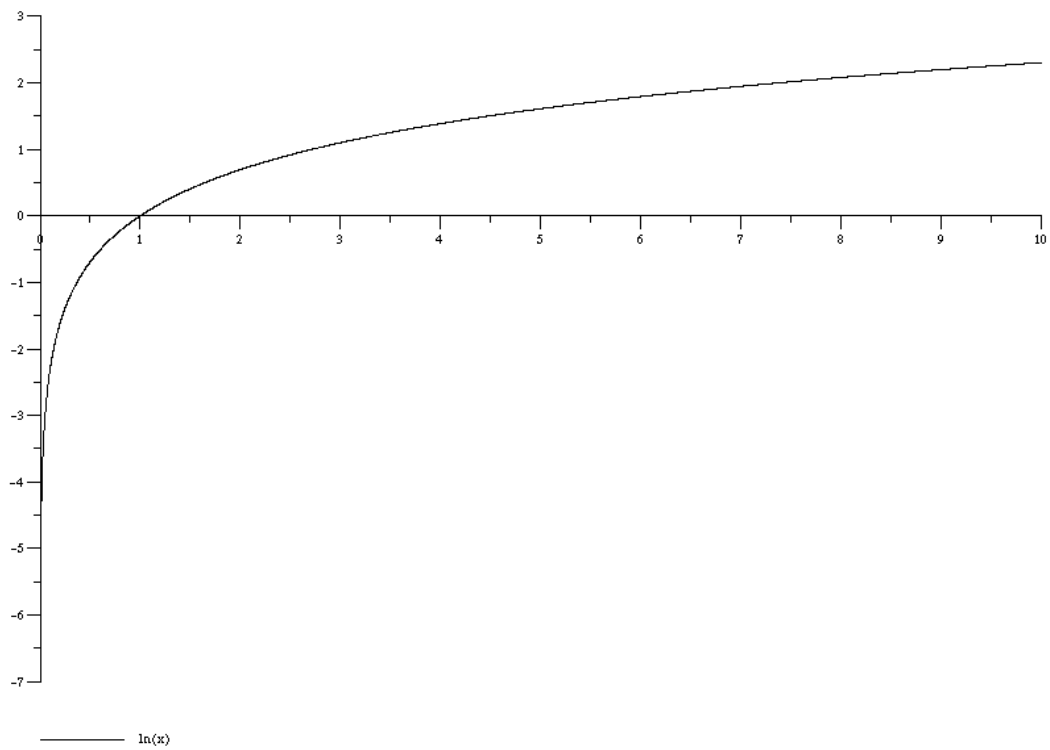
$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	‖			
Variations de f	‖ $-\infty$	0	1	$+\infty$

$x \to \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$
Chaque $y \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent x dans $\mathbb{R}^{+*}$
$\forall y \in \mathbb{R}; \exists! x \in \mathbb{R}^{+*}; y = \ln x$
En particulier, 1 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}^{+*}$ pour la fonction $x \to \ln x$

Il se note e On a : $\ln e = 1$ $(e \simeq 2{,}71828)$

2°) Courbe représentative



3°) Remarques

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; \ln x \leqslant x - 1$

Démonstration :

Posons $d(x)=x-1-\ln x$

$d'(x)=1-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow d'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; d(x) \geqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; x-1-\ln x \geqslant 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; \ln x \leqslant x-1$

$\rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*} ; \ln x < x$

III°) Étude de limites

- ✗ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- ✗ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$
- ✗ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1} = (\ln)'(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

IV°) Dérivés – Primitives

f	***f'***
$\forall x>0 \quad \ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\forall u(x)>0 \quad \ln u(x)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

f	***F***
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|+k$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|+k$