Chapitre III

Introduction à la mécanique :

Référentiel et repères

I. Introduction des référentiels et des horloges

Le mouvement des corps est quelque chose de relatif : cela signifie qu'il faut toujours décrire un mouvement en fonction de quelque chose. En effet, pour démontrer cela, prenons un exemple simple : on se trouve dans un train à l'arrêt avec un train à nos côté qui part en sens contraire de nous. S'il on regarde le second train et uniquement le second train, alors qu'il part, on est incapable de savoir si c'est notre train qui part ou si c'est le train d'à côté. Pour le savoir, nous devons prendre un autre référentiel que celui du train et regarder par exemple la nature. Si la nature ne défile pas devant nos yeux, c'est que c'est le second train qui part et nous sommes toujours à l'arrêt. Il est donc toujours extrêmement important de spécifier le référentiel utilisé lorsque l'on parle d'un mouvement. Pour ce faire, on décrit un mouvement relatif par rapport à un solide prit comme référence (le solide est considéré ici comme indéformable). Ce solide est alors appelé un **référentiel**.

De plus, lorsque l'on décrit un mouvement, on est obligé d'insérer une notion de temps : car pour qu'un objet se déplace d'un endroit A à un autre endroit B, il doit mettre un certain temps, d'où l'utilité de définir une horloge pour pouvoir analyser le mouvement étudié.

En conclusion, dès que l'on parle d'un mouvement, **il est impératif de définir un référentiel et un mouvement**.

II. Description d'un mouvement

1. La trajectoire

Le mouvement d'un point correspond à l'ensemble des points du référentiel parcouru par le mobile. Cette trajectoire est interprétée par une courbe. **Elle dépend entièrement du référentiel** : ils sont totalement liés.

2. Le vecteur position et le vecteur vitesse

Pour décrire un mouvement, nous utilisons l'outil mathématique du vecteur car il réunit à lui tout seul : le sens, la direction, l'intensité et le point d'origine. Un mouvement est alors décrit par un vecteur position noté $\overrightarrow{OM}$ (O étant un point du référentiel et M(t) étant la position du mobile à l'instant t).

Par l'intermédiaire de ce vecteur, on peut définir le vecteur vitesse qui nous donne la vitesse du mobile étudié à un instant *t* donné. Le vecteur vitesse est définit ainsi :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\overrightarrow{OM}}$$

3. Le vecteur accélération

Cette vitesse n'étant souvent pas constante, on définit en plus, à partir de cette vitesse, une accélération comme suit : $\vec{a}=\dfrac{d\,\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\overrightarrow{OM}}$

4. Le repère

Pour simplifier les calculs, il est parfois intéressant de travailler dans un repère. Pour ce faire, on définit un système de coordonnées. En général, on utilise un trièdre trirectangle directe avec les normes de chaque côté valant toutes 1. Associé à une horloge, ce système de coordonnées se nomme un repère.

On distingues deux grands types de repères :

- ✔ Les repères fixes par rapport au référentiel choisi
- ✔ Les repères mobiles par rapport au référentiel choisi

III. Le repère fixe par rapport au référentiel choisi : coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien est fixe et lié au référentiel. Ses trois axes sont orthonormés. On définit un point fixe O ainsi que trois vecteurs unitaires $\left(O\,;\overrightarrow{u_x}\,;\overrightarrow{u_y}\,;\overrightarrow{u_z}\right)$.

$\overrightarrow{OM}$ se définit donc de la sorte dans ce repère : $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\overrightarrow{u_x}+y(t)\overrightarrow{u_y}+z(t)\overrightarrow{u_z}$

De plus : $\overrightarrow{OM}=dx\,\overrightarrow{u_x}+dy\,\overrightarrow{u_y}+dz\,\overrightarrow{u_z}\Leftrightarrow\dfrac{\overrightarrow{OM}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x}+\dfrac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y}+\dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$

$$\vec{v}=v_x\,\overrightarrow{u_x}+v_y\,\overrightarrow{u_y}+v_z\,\overrightarrow{u_z}\Leftrightarrow\vec{v}\left(\begin{array}{l} v_x=\dfrac{dx}{dt}\\ v_y=\dfrac{dy}{dt}\\ v_z=\dfrac{dz}{dt}\end{array}\right\}$$ ce sont des quantités algébriques et non vectorielles

$\vec{a}=a_x\,\overrightarrow{u_x}+a_y\,\overrightarrow{u_y}+a_z\,\overrightarrow{u_z}$ mais $\vec{a}=\dfrac{d\,\vec{v}}{dt}$ et $d\,\overrightarrow{OM}=dv_x\,\overrightarrow{u_x}+dv_y\,\overrightarrow{u_y}+dv_z\,\overrightarrow{u_z}$ alors

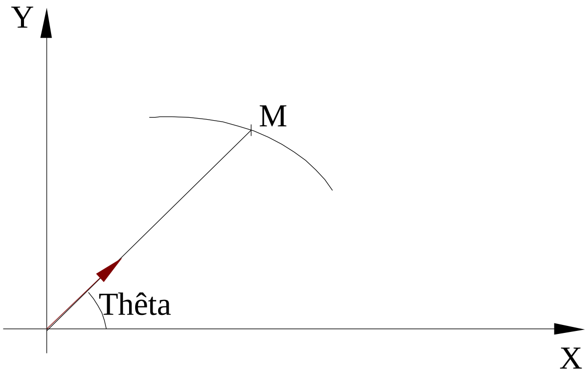
$$\vec{a}\left(\begin{array}{l} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2\,x}{dt^2}\\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2\,y}{dt^2}\\ a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{d^2\,z}{dt^2}\end{array}\right.$$

IV. Repères mobiles par rapport au référentiel

Ces systèmes sont liés au mobile

1. Coordonnées polaires planes

Ce genre de repère est utilisé lorsque le mouvement étudié est lent



$\vec{u_r}$

$o_x \,;\, o_y$ sont définit dans le référentiels

$\overrightarrow{OM} = OM\,\vec{u_r} \Leftrightarrow \vec{u_r} = \vec{u}_{\overrightarrow{OM}}$ alors $\overrightarrow{OM} = r(t)\,\vec{u_r}(t)$ avec $r = OM =$ distance de O à M et $M(r\,;\nu)$

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r} = r\cos\nu\,\vec{u_x} + r\sin\nu\,\vec{u_y}$ (avec ν qui correspond à thêta)

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t)\cos\nu(t) \\ y &= r(t)\sin\nu(t) \end{aligned}\right\} r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \tan\nu = \frac{y}{x} \text{ donc } \nu = \arctan\frac{y}{x}$$

Exemple d'analyse de cas :

- La vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\,\vec{u_r}\right)}{dt} = r\frac{d\,\vec{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\vec{u_r}$$

$$\vec{u_r} = \cos\nu(t)\,\vec{u_x} + \sin\nu(t)\,\vec{u_y}$$

$$\frac{d\,\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\left(\cos\nu\right)}{dt}\vec{u_x} + \frac{d\left(\sin\nu\right)}{dt}\vec{u_y} \Leftrightarrow \frac{d\,\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\left(\cos\nu\right)}{dt}\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_x} + \frac{d\left(\sin\nu\right)}{dt}\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_y} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\,\vec{u_r}}{dt} = -\sin\nu\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_x} + \cos\nu\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_y}$$

$$\vec{u_\nu} = \cos\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u_x} + \sin\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)\vec{u_y} = -\sin\nu\,\vec{u_x} + \cos\nu\,\vec{u_y}$$

$$\frac{d\,\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\,\nu}{dt}\left[-\sin\nu\,\vec{u_x} + \cos\nu\,\vec{u_y}\right] = d\,\frac{\nu}{dt}$$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_\nu}$ avec $\frac{d\,\nu}{dt}$ qui est la vitesse angulaire et $\frac{dr}{dt}$ qui est la vitesse radiale

- l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_\nu}\right] \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\,r}{dt^2}\vec{u_r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\,\vec{u_r}}{dt}\right] + \left[\frac{dr}{dt}\frac{d\,\nu}{dt}\vec{u_\nu} + r\frac{d^2\,\nu}{dt}\vec{u_\nu} + r\frac{d\,\nu}{dt}\frac{d\,\vec{u_\nu}}{dt}\right]$$

$$\vec{u_\nu} = -\sin\nu\,\vec{u_x} + \cos\nu\,\vec{u_y}$$

$$\frac{d\vec{u_\nu}}{dt}=\frac{-d\sin\nu}{dt}\frac{d\nu}{dt}\vec{u_x}+\frac{d\cos\nu}{dt}\frac{d\nu}{dt}\vec{u_y}\Leftrightarrow\frac{d\vec{u_\nu}}{dt}=-\cos\nu\frac{d\nu}{dt}\vec{u_x}-\sin\nu\frac{d\nu}{dt}\vec{u_y}\Leftrightarrow$$

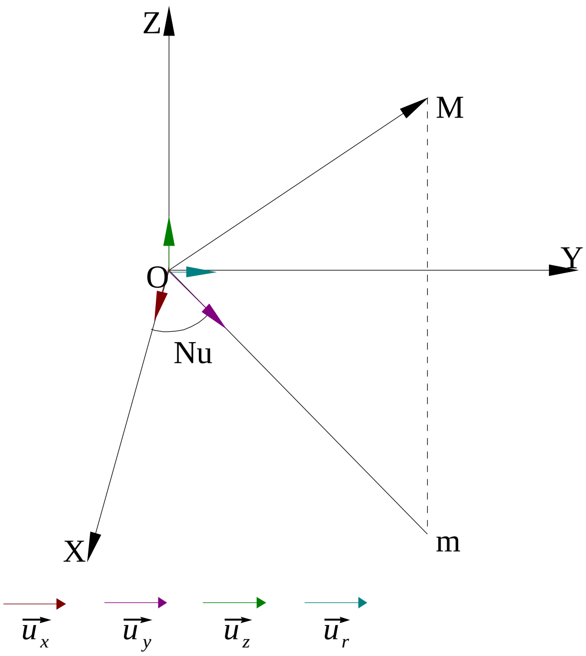
$$\frac{d\vec{u_\nu}}{dt}=\frac{-d\nu}{dt}\left(\cos\nu\vec{u_x}+\sin\nu\vec{u_y}\right)\Leftrightarrow\frac{d\vec{u_\nu}}{dt}=\frac{-d\nu}{dt}\vec{u_r}$$

$$\vec{a}=\left[\frac{d^{2r}}{dt^2}-r\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r}+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\nu}{dt}+r\frac{d^2\nu}{dt^2}\right]\vec{u_\nu}$$

2. Coordonnées cylindriques

Dans le cas d'un mouvement non plan, il devient intéressant d'utiliser ce type de repère $\left(0\ ;\vec{u_r};\vec{u_\nu};\vec{u_z}\right)$ dont $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\nu}$ dépendent du temps. En revanche, $\vec{u_z}$ est fixe.

Dans ce repère : $\overrightarrow{OM}=r\vec{u_r}$



$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u_r}+r\frac{d\nu}{dt}\vec{u_\nu}+\frac{dz}{dt}\vec{u_z}$$

$$\vec{a}=\left[\frac{d^{2r}}{dt^2}-r\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right]\vec{u_r}+\left[\frac{2d\nu}{dt}\frac{dr}{dt}+\frac{d^2r}{dt}\right]\vec{u_\nu}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{u_z}$$

3. Coordonnées sphériques

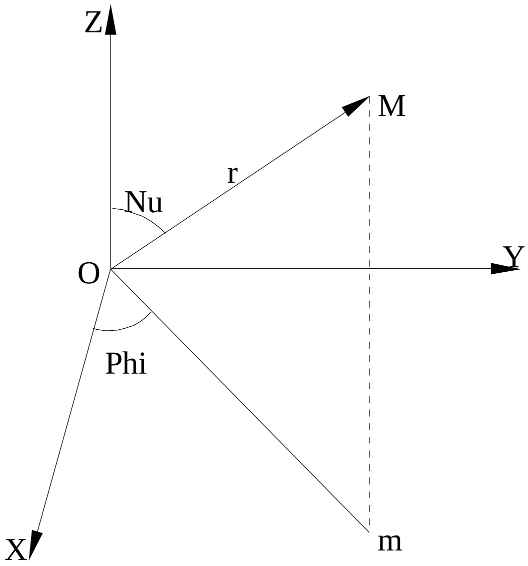
Lorsque le problème a une symétrie sphérique, il est souvent commode d'utiliser les coordonnées sphériques : elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$x=r\sin\nu\cos\varphi$

$y=r\sin\nu\sin\varphi$

$z=r\cos\nu$

et inversement : $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ainsi que $\tan\varphi=\dfrac{y}{x}$ et $\cos\nu=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$



Les angles ν et φ sont appelés les angles d'Euler.

$$\overrightarrow{OM}=\left(\sin\nu\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x}+\sin\nu\sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}\right)r$$

Et la différentielle du vecteur position est :

$$d\,\overrightarrow{OM}=dr\,\overrightarrow{u_r}+rd\,\nu\,\overrightarrow{u_\nu}+r\sin\nu\,d\,\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

