Les intégrales

I°) Rappel

Si F et G sont 2 primitives de f sur I, alors :
$\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \, ; \, f(x) = g(x) + k$

Remarque :
Si f admet des primitives sur I et si $(a,b) \in I^2$ alors :
$F(b) - F(a) = \left[G(b) + \cancel{k} \right] - \left[G(a) + \cancel{k} \right]$

II°) Les intégrales

1°) Définition

Si f admet des primitives sur I et si $(a,b) \in I^2$, on appelle intégrale de f de a à b, le nombre réel **F(b) − F(a)**
Il ne dépend pas de la primitive choisie

Notation : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[f(x) \right]_b^a = F(b) - F(a)$
$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : Intégrale de f de x dx de a à b

2°) Exemple

$$\int_{-3}^{2} \left(x^2 - 4x + 5\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_{-3}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8 + 10 \right) - \left(-9 - 18 - 15 \right) = \frac{8}{3} + 2 + 42 = \frac{8}{3} + 44$$
$$\int_{-3}^{2} \left(x^2 - 4x + 5\right) dx = \frac{140}{3}$$

3°) Propriétés

$f \colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$f \colon x \rightarrow f(x)$
$I \subset D_f$
f est intégrable sur I admet une primitive

- $\forall a \in I \, ; \int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\forall (a,b) \in I^2 \, ; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- Relation de chasles :

$$\forall (a,b,c) \in I^3 ; \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Démonstration :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

- Linéarité de l'intégrale

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)$$

Démonstration :

Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I
Alors, αF+βG est une primitive de αf+βg sur I

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \left[(\alpha F + \beta G)(x) \right]_a^b \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha [F(b) - F(a)] + \beta [G(b) - G(a)] \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

- Si f est positive sur $[a,b] \subset I$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Démonstration :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Or f est positive sur $[a,b]$ donc F' est positive sur $[a,b]$donc
F est croissante sur $[a,b]$ d'où $F(a) \leq F(b) \, et \, F(b) - F(a) \geq 0$

- Si f et g sont intégrables sur $[a,b] \subset I$ et si $\forall x \in [a,b] ; f(x) \leq g(x)$
alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :

Pour hypothèse, on a : $\forall x \in [a,b] ; f(x) \leq g(x)$ et $\forall x \in [a,b] ; g(x) - f(x)$
donc : $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0$ (Positivité de l'intégration)

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$$

III°) Intégrations par partie

1°) Démonstration

Soit u et v, deux fonctions intégrables et dérivables sur I : $[a,b] \subset I$

$$\left[u(x)v(x)\right]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\int_a^b \left[u(x)v(x)\right]' dx = \int_a^b \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] dx$$

$$\left[u(x)v(x)\right]_a^b = \int_a^b \left[u'(x)v(x)\right] dx + \int_a^b \left[u(x) + v'(x)\right] dx$$

$$\int_a^b \left[u(x)v'(x)\right] dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b \left[u'(x)v(x)\right] dx$$

2°) Exemples

Calculer :

$$I = \int_0^{\pi} (x \cos x)\, dx$$

Posons $u(x) = x$ $\quad v'(x) = \cos x$

Alors $u'(x) = 1$ $\quad v(x) = \sin x$

D'où $I = \left[x\, sinx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx$

$$I = 0 - [-\cos x]_0^{\pi} \Leftrightarrow I = -\left[(-\cos \pi) - (-\cos 0)\right] \Leftrightarrow I = -(1+1) \Leftrightarrow I = -2$$

IV°) Valeur moyenne

1°) Théorème

- ✔ Si f est définie, intégrable et bornée sur [a,b] alors :

$$\forall x \in [a,b] ;\ m \leq f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [a,b] ;\ \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\ dx$$

$$\forall x \in [a,b] ;\ [m\, x]_a^b \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq [Mx]_a^b$$

$$\forall x \in [a,b] ;\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b-a)$$

- ✔ Si f est définie et intégrable sur $[a,b]$ et si pour tout $x \in [a,b] ; \left|f(x)\right| \leq M$ alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq M\,(b-a)$$

2°) Définition

On appelle *valeur moyenne de f sur [a,b]*, le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

3°) Théorème n°3

D’après le théorème n°1 :

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)\Leftrightarrow m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M\Leftrightarrow m\leq\mu\leq M$$

4°) Conséquences

La valeur moyenne μ de f sur $[a,b]$ est un élément de $f([a,b])$

Il existe un $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\mu$ et tel que $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,fx$

V°) Étude d’une fonction primitive à l’aide d’une intégrale

1°) Définition

Si f est définie et intégrable sur I et $a\in I$, alors l’unique primitive de f sur I qui s’annule en a est la fonction G définie par :

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

2°) Démonstration

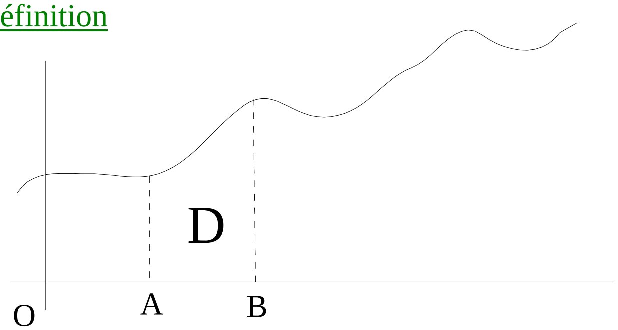
Soit F une primitive de f sur I

$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\left[f(t)\right]_a^x=F(x)-F(a)$

Alors $G'(x)=\left[F(x)-F(a)\right]'=F'(x)=f(x)$ et $G'(a)=F(a)-F(a)=0$

VI°) Interprétation graphique d’une intégrale définie, calcul d’aires

1°) Définition



où cette **fonction est positive sur [a,b]**

$D=\left\{M(x,y)\in P\,/\,a\leq x\leq b \text{ et } 0\leq y\leq f(x)\right\}\subset P$

Aire de ce domaine :

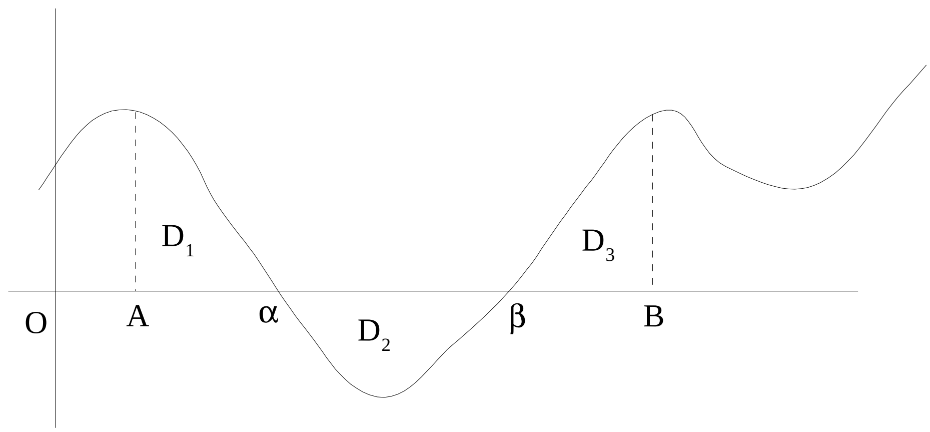
$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

A s'exprime en unité d'aire

1 unité d'aire $= \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\, cm^2$

Si la fonction est négative sur [a,b] alors :

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

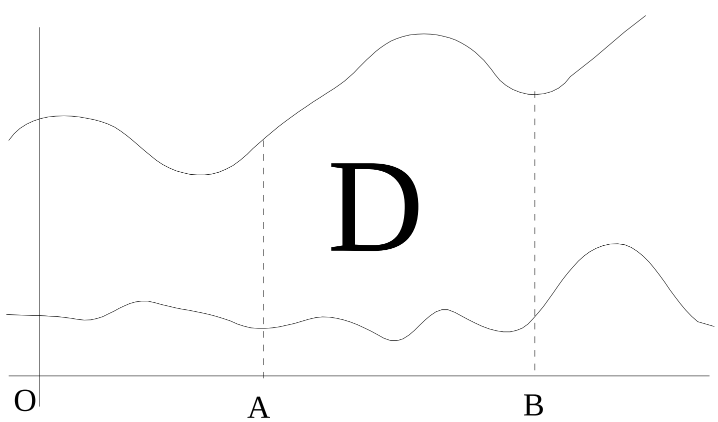


Dans ce cas là, l'aire totale correspond à la somme des aires, donc :

$$A = A(D_1) + A(D_2) + A(D_3)$$

$$A = \int_a^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{b} f(x)\,dx$$

2°) Aire d'un domaine situé entre deux courbes



$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

VII°) Intégrales de fonctions ayant des propriétés particulières

1°) Fonctions paire

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

2°) Fonctions impaire

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

3°) Fonctions périodiques

$$\int_{0}^{t} f(x)\,dx=\int_{a}^{a+t} f(x)\,dx$$

VIII°) Calcul de volume

1°) Généralités

L'espace est rapporté par un repère orthonormal $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
L'unité de volume est le volume du cube construit sur des vecteurs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

2°) Volume d'une boule

B est la boule de centre O et de rayon R. L'intersection de la boule (B) et d'un plan P détermine un cercle ∑. On cherche le volume de la partie comprise entre P_1 d'équation z=z et P_2 d'équation $z=z_2$.

Pour $t\in[z_1,z_2]$, on appelle S(t) l'aire de l'intersection de la boule et du plan d'équation

On admet que $V=\int_{z_1}^{z_2} S(t)\,dt$

Le disque (intersection de B et de P) d'équation $z_1=t$ et pour aire : $IM^2=R^2-t^2$

$$S(t)=\pi\times \mathrm{IM}^2\Leftrightarrow S(t)=\pi\left(R^2-t^2\right)$$

$$V=\int_{-R}^{R} S(t)\,dt=\int_{-R}^{R}\left[\pi(R^2-t^2)\right]dt=\left[\pi R^{2t}-\pi\frac{t^3}{3}\right]_{-R}^{R}\Leftrightarrow$$

$$V=\left(\pi R^3-\frac{\pi R^3}{3}\right)-\left(-\pi R^3+\frac{\pi R^3}{3}\right)\Leftrightarrow V=\pi R^3-\frac{\pi R^3}{3}+\pi R^3-\frac{\pi R^3}{3}\Leftrightarrow$$

$$V=\frac{3\pi R^3-\pi R^3+3\pi R^3-\pi R^3}{3}\Leftrightarrow V=\frac{4\pi R^3}{3}$$

3°) Volume d'un cône

Le cône a pour sommet O, pour hauteur h, pour rayon R. S(t) est l'air de l'intersection du cône et du plan d'équation z=t. On note r(t) le rayon du disque d'intersection :

D'après le théorème de Thales, on a :

$$\frac{r(t)}{R}=\frac{t}{h}\Leftrightarrow r(t)=\frac{Rt}{h}$$

$$S(t)=\pi\times[R(t)]^2\Leftrightarrow S(t)=\pi\left(\frac{Rt}{h}\right)^2\Leftrightarrow S(t)=\frac{\pi R^2 t^2}{h^2}$$

$$V=\int_0^h S(t)\,dt=\int_0^h \frac{\pi R^2 t^2}{h^2}dt=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h t^2\,dt=\frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi R^2}{h^2}\left(\frac{h^3}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

4°) Volume d'une pyramide

La pyramide a pour sommet O, pour hauteur h et pour aire de base : S(h). On pose S(t), l'aire de l'intersection de la pyramide et du plan d'équation z=t

$$\frac{S(t)}{S(h)}=\left(\frac{t}{h}\right)^2=\frac{t^2}{h^2}\Leftrightarrow S(t)=\frac{t^2}{h^2}S(h)$$

$$V=\int_0^h S(t)\,dt=\int_0^h \frac{t^2}{h^2}S(h)\,dt=\frac{S(h)}{h^2}\int_0^h t^2\,dt=\frac{S(h)}{h^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^h=\frac{\frac{S(h)}{h^2}\times h^3}{3}\Leftrightarrow$$

$$V=\frac{1}{3}S(h)\times h$$

5°) Volume d'un prisme

Prisme dont la base à pour aire A et de hauteur h

$$\forall t\in[0,h]\,;\,S(t)=A$$

$$V=\int_0^h A\,dt\Leftrightarrow V=A\int_0^h dt\Leftrightarrow V=A[t]_0^h\Leftrightarrow$$

$$V=A\times h$$